ECUACIONES DE LAS RECTAS EN EL PLANO Y TEOREMA DE TALES.

Autora: Lucía Contreras Caballero. Profesora Titular Numeraria jubilada de la Universidad Autónoma de Madrid.
(lucia.contreras11@gmail.com)

Nivel: Educación Secundaria y Bachillerato.

INTRODUCCIÓN.

Se entiende por recta en una superficie el camino más corto que describe la luz al propagarse por la superficie. Mientras que una regla se ajusta perfectamente al trazado de una recta en un plano, la regla no se ajusta al trazado de la recta en una esfera.

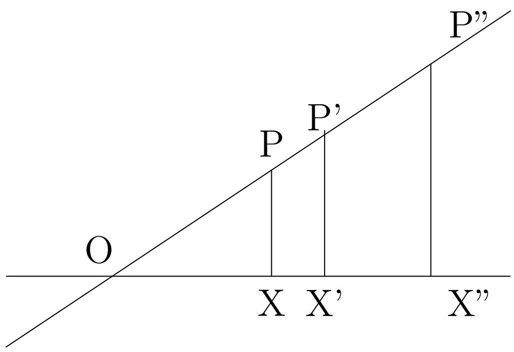
La ecuación de una recta en el plano cartesiano se deduce del hecho de que todos los vectores determinados por puntos de la recta son múltiplos de uno de ellos.

Sin embargo, lo que es cierto en el plano y parecería también cierto a simple vista en una recta de una esfera de radio muy grande (aparentemente plana) no lo es en la esfera.

Esta diferencia se debe a que podemos demostrar, usando el teorema de Tales, que en el plano, trazada una recta con una regla y fijados cuatro puntos O, P, P', P", sobre la recta, los vectores $\overrightarrow{OP'}$y $\overrightarrow{OP''}$ son múltiplos del mismo vector $\overrightarrow{OP}$ porque en la geometría plana, perpendiculares a una recta fija son paralelas entre sí. Pero esto no es cierto en la esfera, aunque aproximadamente fuera plana (si su radio fuera muy grande) ya que en la esfera, las perpendiculares a una recta dada no son paralelas entre sí: por ejemplo, meridianos perpendiculares al ecuador se encuentran en los polos.

Como sobre una esfera no es cierto el Teorema de Tales, aunque éste pareciera visualmente cierto en el caso en que la esfera fuera de radio muy grande, las ecuaciones de sus rectas no se obtienen de la misma manera. Aquí sólo obtenemos las ecuaciones de las rectas en el plano, fundamentadas en el hecho objetivo del teorema de Tales, pero queremos dejar constancia de que las ecuaciones de las trayectorias de la luz sobre la esfera son cosas diferentes, por no poder fundamentarse en el mismo hecho.

Vamos a ver cómo se demuestra el teorema de Tales y cómo se aplica a la obtención de la ecuación de la recta pase o no pase por el origen.



1. Teorema de Tales y caracterización de la recta.

Dada la recta r y los puntos O, P, P’, P”, sobre la recta, trazamos la horizontal que pasa por O y las perpendiculares a la horizontal que pasan por los puntos P, P’, P”, al mismo tiempo paralelas entre sí, que determinan en la horizontal los puntos X, X’, X”. Entonces, el teorema de Tales, [A], que dice que los segmentos determinados por rectas paralelas en rectas concurrentes son proporcionales, da:

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OP'}} = \frac{\overrightarrow{OX}}{\overrightarrow{OX'}}, \qquad \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OP''}} = \frac{\overrightarrow{OX}}{\overrightarrow{OX''}}$$

de donde,

$$\frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OX'}} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OX}} = \frac{\overrightarrow{OP''}}{\overrightarrow{OX''}}$$

Llamando x, x', x'', las distancias a O de los puntos X, X’, X”, que son, respectivamente, las longitudes de los vectores $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OX'}$, $\overrightarrow{OX''}$, tenemos:

$$\frac{\overrightarrow{OP'}}{x'} = \frac{\overrightarrow{OP}}{x} = \frac{\overrightarrow{OP''}}{x''} \;\text{ de donde: }\; \frac{x'}{x} = \frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}}, \quad \frac{x''}{x} = \frac{\overrightarrow{OP''}}{\overrightarrow{OP}}$$

y llamando

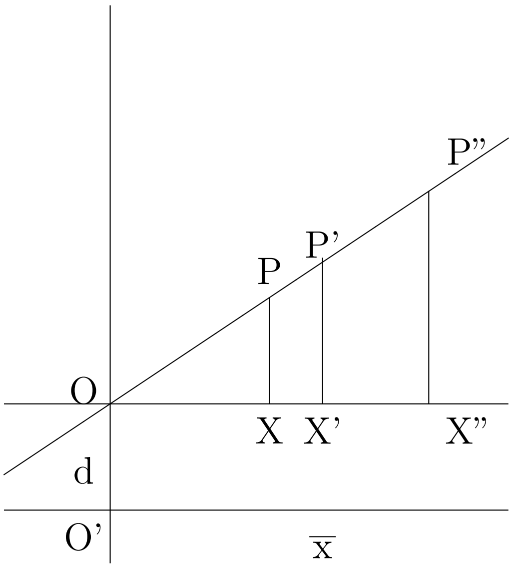
$$\lambda' = \frac{x'}{x},\ \lambda'' = \frac{x''}{x},\ \text{tenemos:}$$

$$\lambda' = \frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}}, \quad \lambda'' = \frac{\overrightarrow{OP''}}{\overrightarrow{OP}}, \quad \text{es decir,} \quad \overrightarrow{OP'} = \lambda'\overrightarrow{OP}, \quad \overrightarrow{OP''} = \lambda''\overrightarrow{OP}.$$

como se ha dicho anteriormente.

Cualquier vector $\overrightarrow{OP}$ caracteriza a la recta, que se dice engendrada por ese vector $\overrightarrow{OP}$. De esta propiedad deducimos la ecuación de la recta:

2. Ecuación de la recta.



2.1. Ecuación de la recta pasando por el origen.

Consideramos la recta horizontal como eje de abscisas y una recta perpendicular a ella por el punto O como eje de ordenadas para un sistema de coordenadas cartesiano. Entonces, si

$$P = (p_1, p_2), \quad P' = (p_1', p_2'), \quad P'' = (p_1'', p_2'')$$

por el teorema de Tales, expuesto anteriormente,

$$(p_1', p_2') = \lambda'(p_1, p_2), \quad (p_1'', p_2'') = \lambda''(p_1, p_2).$$

Y para un punto general $Q = (q_1, q_2)$ de la recta, tenemos $(q_1, q_2) = \lambda(p_1, p_2)$, por lo que

$$\frac{q_1}{p_1} = \frac{q_2}{p_2} \text{ de donde } \quad q_1 p_2 - p_1 q_2 = 0.$$

Como (q_1, q_2) es un punto general y (p_1, p_2) es un punto fijo, podemos escribir, cambiando la notación: $(q_1, q_2) = (x, y)$ y $(p_1, p_2) = (-b, a)$, obteniéndose $ax + by = 0$ que es la ecuación de la recta que pasa por el origen.

2.2. Ecuación de la recta que no pasa por el origen.

Si el origen de coordenadas O' no está sobre la recta, sino que está debajo de O, a distancia d en vertical de O, considerando la horizontal que pasa por O' como eje de abscisas y como eje de ordenadas la vertical que pasa por O' y O, y llamando $(\overline{x}, \overline{y})$ a las coordenadas de los puntos en estos nuevos ejes, tenemos $\overline{x} = x, \overline{y} = y + d$, obteniéndose que

$$ax + by = 0 \Longleftrightarrow a\overline{x} + b(\overline{y} - d) = 0 \Longleftrightarrow a\overline{x} + b\overline{y} - bd = 0$$

de donde la ecuación general de la recta que no pasa por el origen es

$$ax + by + c = 0$$

donde $c = -bd$. Si $d = 0$, la recta pasa por el origen y entonces, $c = 0$, obteniéndose la ecuación del apartado anterior.

Referencias.

[A] Alfonso Gironza. Matemáticas. Segundo curso de Bachillerato (1960). Editor Alfonso Gironza. Barcelona 1960.

[S] S. Segura Doménech. Matemáticas. Curso Preuniversitario. Teoría y Práctica. Tomo segundo. Editor E. López Mezquida, Valencia. 1964.